Université Sidi Mohammed Ben Abdellah
Ecole Nationale des Sciences Appliquées de Fès
Année Universitaire 2014-2015 S1

Série 4 : Matrices et Systèmes linéaires

Exercice 1 *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer $A^2 + B^2 + 2AB$, $(A+B)^2$, $A^2 - B^2$, *et* $(A-B)(A+B)$. *Que peut-on conclure.*

Exercice 2 *Soit* $A = I_3 + B$, *où*

$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et où* I_3 *est la matrice identité d'ordre* 3.

1. *Calculer* A^2 *et* A^3.
2. *Montrer par récurrence que* B^n *est un multiple de* B.
3. *En déduire* A^n.

Exercice 3 *Soient les trois suites* (U_n), (V_n) *et* (W_n) *liées par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} U_n &= U_{n-1} + V_{n-1} \\ V_n &= V_{n-1} + 2W_{n-1} \\ W_n &= W_{n-1} \end{cases}$$

U_0, V_0 *et* W_0 *sont donnés. On pose, pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \begin{pmatrix} U_n \\ V_n \\ W_n \end{pmatrix}.$$

1. *Mettre ce système sous la forme :* $X_n = MX_{n-1}$.
2. *Calculer les puissances successives de* A, *où* $A = M - I_3$. *En déduire pour tout entier non nul* n *la valeur de* M^n.
3. *Montrer que* M *est inversible et calculer* M^{-1}.
4. *Déterminer* U_n, V_n *et* W_n *en fonction de* U_0, V_0, W_0 *et* n.

Exercice 4 *Soit* $A = \{aI_2 + bB \in M_2(\mathbb{R})/a, b \in \mathbb{R}\}$, *et où*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* B^2.
2. *Montrer que* A *est un sous espace vectoriel de* $M_2(\mathbb{R})$ *et donner une base de* A.
3. *Montrer que* A *est un sous anneau de* $M_2(\mathbb{R})$ *qui est commutatif.*

Exercice 5 *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer le rang de* A *et deduire que* A *est inversible.*
2. *Calculer* A^{-1}.

Exercice 6 *Soit* A *la matrice de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *définie par* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Chercher* A^2 *en fonction de* A *et* I_3. *Déduire que* A *est inversible.*
2. *Chercher le rang de* A. *Déduire que* A *est inversible.*
3. *Calculer* A^{-1}.

Exercice 7 *Soit* A *une matrice de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *telle que* $A^7 + A^3 - 3A + 2I_n = 0$. *Montrer que* A *est inversible et donner* A^{-1} *en fonction des puissances de* A *et de* I_n.

Exercice 8 *Résoudre dans* $\mathbb{R}^3$ *le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

Exercice 9 *Discuter et résoudre suivant les valeurs du réel* m *le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = 1 \\ mx + y + z = 1 \end{cases}$$